Teljes indukció 1

Teljes indukció

A teljes indukció talán a legfontosabb bizonyítási módszer a számítástudományban.

Teljes indukció elve.

Legyen $P(n)$ egy állítás. Tegyük fel, hogy

(1) $P(0)$ igaz,

(2) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Mielőtt a bizonyításhoz hozzákezdenénk tisztáznunk kell, hogy a bal oldali összeg

- $n = 0$ esetén megállapodás szerint egyetlen tagot sem tartalmaz, értéke definíció szerint 0,
- $n = 1$ esetén egyetlen tagból áll, bármit is sugall a 2 meg a $\cdots$; az egyetlen tag az 1 és az összeg is ugyanennyi.

Teljes indukció

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$\frac{0 \cdot 1}{2} = 0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Teljes indukció

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=[1+2+\cdots+n]+(n+1).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

így

$$[1+2+\cdots+n]+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).$$

Teljes indukció

Most némi leleményre van szükség:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Ez a bizonyítás viszonylag egyszerű volt, mindazonáltal a legbonyolultabb teljes indukciós bizonyítások is ugyanezt a sémát követik.

1. Világosan fogalmazzuk meg, hogy az állítást teljes indukcióval fogjuk belátni.
2. Definiáljuk a megfelelő $P(n)$ állítást. Ez általában egyszerű, de azért vannak kivételek.
3. Mutassuk meg, hogy $P(0)$ igaz. Ez szintén egyszerű szokott lenni, azonban nem árt körültekintőnek lenni abban, hogy $P(0)$ pontosan mit is állít.

Teljes indukció

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz. Ezt a fázist indukciós lépésnek nevezzük. $P(n)$ és $P(n+1)$ általában elég hasonló állítások, mindazonáltal a közöttük lévő rés áthidalása némi leleményt szokott igényelni. Akármilyen gondolatmenetet választunk is, annak működni kell minden n természetes számra, hisz célunk a

$$P(0) \Rightarrow P(1),\ P(1) \Rightarrow P(2),\ P(3) \Rightarrow P(4),\ \ldots$$

implikációk bizonyítás egyszerre!

5. Zárjuk le a bizonyítást azzal, hogy a teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$(0+1)!-1=1-1=0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned}1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!+(n+1)\cdot(n+1)! &= \\ &= [1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!]+(n+1)\cdot(n+1)!\end{aligned}$$

Back
Close

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

így

$$\begin{aligned}[1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!] + (n+1) \cdot (n+1)! &= \\ = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!\end{aligned}$$

Teljes indukció

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}(n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)! &= (1+(n+1))\cdot(n+1)!-1\\ &= (n+2)\cdot(n+1)!-1\\ &= (n+2)!-1,\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal üres, a jobb oldal pedig

$$\frac{0^2 \cdot 1^2}{4} = 0.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3.$$

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

így

$$[1^3 + 2^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3.$$

Teljes indukció

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2}.$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2}.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal $\frac{1}{2}$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \cdot (2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2) \cdot (2n+4)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2n+3}{2n+4}.$$

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2n+2},$$

így

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}\cdot\frac{2n+3}{2n+4} \geqslant \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}.$$

Teljes indukció

Most némi leleményre van szükség:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4} &= \frac{1}{2n+4}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\\ &= \frac{1}{2(n+1)+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\\ &= \frac{1}{2(n+1)+2}\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\\ &> \frac{1}{2(n+1)+2},\end{aligned}$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Teljes indukció

Jegyezzük, hogy a teljes indukció csak a bizonyításban van segítségünkre, a bizonyítandó állítás kitalálásához más módszerek szükségesek.

Teljes indukció

Előfordul, hogy egy állítást csak minden $n \geqslant k$ egész számra akarjuk belátni, nem minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A teljes indukció elvét ilyenkor is alkalmazhatjuk.

Teljes indukció elve.

Legyen $P(n)$ egy állítás és legyen $k \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy

(1) $P(k)$ igaz,

(2) minden $n \geqslant k$ egész szám esetén, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \geqslant k$ egész számra.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

minden n pozitív egész számra.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor mindkét oldal 1.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = [1+3+\cdots+(2n-1)]+(2n+1).$$

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2,$$

így

$$[1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

ami éppen a $P(n + 1)$ állítás jobb oldala, így $P(n + 1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

minden n pozitív egész számra.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal $1 \cdot 2 = 2$, a jobb oldal pedig

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) &= \\ &= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)] + (n+1) \cdot (n+2). \end{aligned}$$

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

így

$$\begin{aligned}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)] + (n+1) \cdot (n+2) = \\ = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2).\end{aligned}$$

Teljes indukció

Most a jobb oldalt közös nevezőre hozva, majd kiemelve

$$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

adódik, ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala. Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Teljes indukció

Példa. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

minden n pozitív egész számra.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ a következő állítás:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Teljes indukció

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz ekkor a bal oldal

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

a jobb oldal pedig

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész esetén. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Teljes indukció

A $P(n+1)$ állítás bal oldalát írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$
$$=\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Teljes indukció

Az indukciós feltevés szerint

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

így

$$\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Teljes indukció

Most némi leleményre van szükség:

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} &= \frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n+2}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n+1}{n+2},
\end{aligned}
$$

ami éppen a $P(n+1)$ állítás jobb oldala, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén.

Egy hibás bizonyítás

"Állítás". Minden ló ugyanolyan színű.

"Bizonyítás". Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy lovak bármely n elemű halmazában minden ló egyforma színű.

Alapeset. $P(1)$ igaz, hisz önmagával minden ló azonos színű.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely n pozitív egész számra, azaz lovak bármely, n elemű halmazában minden ló egyforma színű. Belátjuk, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Egy hibás bizonyítás

Tekintsük lovak egy $n+1$ elemű $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazát.

Az indukciós feltevés szerint az $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű.

Ugyancsak az indukciós feltevés szerint az $\{\ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazban is minden ló ugyanolyan színű.

Ebből következik, hogy az $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű, így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden n pozitív egész esetén. Az állítás az a speciális eset, amikor n a világ összes lovának a száma.

Hol a hiba?

Back
Close

Egy hibás bizonyítás

A hiba a következő mondatban lapul: "Ebből pedig következik, hogy az $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazban minden ló ugyanolyan színű."

A ... jelölések azt a benyomást keltik, hogy az $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$ és $\{\ell_2, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1}\}$ halmazoknak mindig van közös eleme, azonban ez $n = 1$ esetén nem igaz! Ekkor a két halmaz $\{\ell_1\}$ és $\{\ell_2\}$, amelyek magától értetődően diszjunktak.

Back
Close

Egy hibás bizonyítás

Ez alapvető hiba egy teljes indukciós bizonyításban. Beláttuk $P(1)$-et, majd beláttuk, hogy

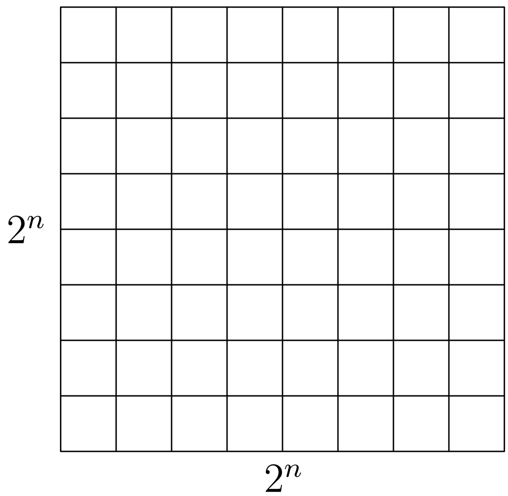
$$P(2) \Rightarrow P(3),\ P(3) \Rightarrow P(4),\ P(4) \Rightarrow P(5),\ \ldots.$$

Azonban nem láttuk be, hogy $P(1) \Rightarrow P(2)$, és ettől minden összeomlik.

Nem állíthatjuk, hogy $P(2), P(3), P(4), \ldots$ igaz. És természetesen nem is igazak — mindenki látott már különböző színű lovakat.

Díszburkolat

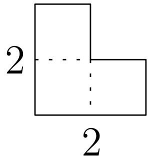
Példa. Egy régebben nagy népszerűségnek örvendő, ám mára meglehetősen elhanyagolt,



alakú tér felújítását tervezi a város önkormányzata.

Díszburkolat

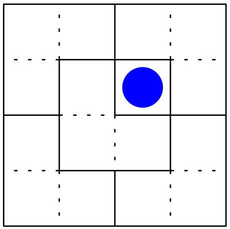
A tér közepére a város híres szülöttének szobrát szeretnék felállítani (ha $n \geqslant 1$, akkor négy középső négyzet van, ezek bármelyikére kerülhet a szobor), az ezen kívüli részt pedig



alakú díszkövekkel akarják burkolni.

Díszburkolat

Például $n = 2$ esetén a díszkövek egy lehetséges elrendezése a következő:



Mi a helyzet más n-ekre? Mindig megoldható a feladat?

Díszburkolat

Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Díszburkolat

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a tér egy négyzetnyi és szükségképpen azon áll a szobor.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú tér, közepén a város híres szülöttének szobrával, szintén burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Bajban vagyunk! Egy kisebb térnek a kívánt módon való burkolása semmilyen támpontot nem ad egy nagyobb térnek a kívánt módon való burkolhatóságához. Nem tudjuk áthidalni a $P(n)$ és $P(n+1)$ közötti rést.

Mit tehetünk ilyenkor?

Díszburkolat

Bármilyen furcsának is hangzik első hallásra, de teljes indukciós bizonyításoknál sokszor célravezető módszer, hogy ha nem tudunk valamit bebizonyítani, akkor próbáljunk meg valami általánosabbat belátni.

Ez nem butaság; amikor az indukciós lépésben a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ implikációt akarjuk igazolni, akkor jobb helyzetben leszünk, ha egy általánosabb, erősebb $P(n)$ igaz voltát tételezhetjük fel.

Próbáljunk meg itt is egy általánosabb állítást megfogalmazni!

Back
Close

Díszburkolat

Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

Eredeti állításunk ennek nyilván speciális esete.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Legyen $P(n)$ az az állítás, hogy egy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú tér burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

Díszburkolat

Alapeset. $P(0)$ igaz, hisz ekkor a tér egy négyzetnyi és szükségképpen azon áll a szobor.

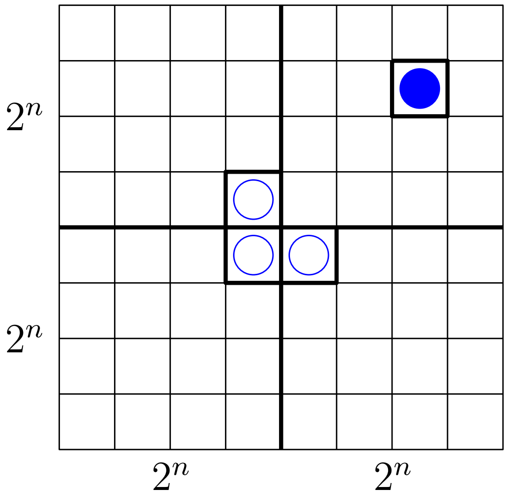
Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú tér is burkolható a fenti L alakú díszkövekkel, akármelyik négyzeten is áll a város híres szülöttének szobra.

Tekintsünk egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet alakú teret, és álljon a város híres szülöttének szobra egy tetszőleges négyzeten.

Bontsuk fel a teret két egymásra merőleges egyenessel négy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú részre. Most valamelyik ilyen rész tartalmazza a város híres szülöttének szobrát.

Díszburkolat

Az ábrán látható módon állítsunk fel három ideiglenes szobrot (üres kék körök) azokban a $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú részekben, amelyek nem tartalmazzák az igazi szobrot.



Back
Close

Díszburkolat

Az indukciós feltevés szerint mind a négy $2^n \times 2^n$-es négyzet alakú rész, bennük a három ideiglenes és az egy igazi szoborral, burkolható a fenti L alakú díszkövekkel.

Eltávolítva az ideiglenes szobrokat és helyüket egyetlen L alakú díszkővel fedve, az egész tér burkolhatósága következik.

Így $P(n+1)$ is igaz.

A teljes indukció elve szerint $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Díszburkolat

Vegyük észre, hogy nem csak azt láttuk be, hogy egy megfelelő burkolás létezik, de algoritmust is adtunk egy ilyen előállítására.

Másrészt azt is beláttuk, hogy a szobor akár a tér szélére is állítható.