

Másodfokú egyenletek

1. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket!

a.) $x^2 - 4x + 4$

b.) $x^2 - 6x + 8$

c.) $x^2 + 8x - 2$

d.) $x^2 - 4x + 9$

e.) $-x^2 + 8x - 2$

f.) $-x^2 - 4x + 3$

g.) $2x^2 + 8x - 5$

h.) $2x^2 - 4x + 3$

i.) $-3x^2 + 6x + 1$

2. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a.) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b.) $g(x) = -x^2 - 4x + 3$

c.) $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$

d.) $j(x) = -3x^2 - 12x - 9$

e.) $k(x) = 2x^2 + 12x + 16$

3. A következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényekben határozzuk meg a q értékét úgy, hogy a függvénynek 0 zérushelye; 1 zérushelye; 2 zérushelye legyen:

a.) $f(x) = x^2 - 4x + q$

b.) $g(x) = -x^2 - 4x^2 + q$

c.) $h(x) = 2x^2 - 4x + q$

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a.) $x^2 = 121$

b.) $3x^2 = 27$

c.) $x^2 - 256 = 0$

d.) $2x^2 + 50 = 0$

e.) $(x+1)^2 = 4$

f.) $(2x+1)^2 = 25$

g.) $x^2 - 4x = 0$

h.) $x^2 + x = 0$

i.) $5x^2 = 35x$

5. A következő egyenletekben állapítsuk meg a q paraméter értékét, hogy az egyenletnek két különböző valós gyöke; egy valós gyöke; ne legyen megoldása a valós számok körében.

a.) $qx^2 + 2x + 3 = 0$

b.) $x^2 + qx + 2 = 0$

c.) $x^2 - 4x + q = 0$

6. Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek gyökei az alábbi számpárok:

a.) 2 és 4

b.) -3 és 5

c.) $\frac{2}{3}$ és $-\frac{3}{4}$

7. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a.) $x^2 - 8x + 15$

b.) $2x^2 - 14x + 20$

c.) $-2x^2 - 7x + 15$

d.) $-2x^2 - 7x - 3$

8. Egyszerűsítsük a következő törteteket!

a.) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

b.) $\frac{x^2 + 2x - 3}{-x^2 + 4x - 3}$

c.) $\frac{6x^2 + x - 2}{-2x^2 + 5x - 2}$

d.) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - x - 20}$

e.) $\frac{3x^2 - 30x + 75}{4x^2 - 100}$

d.) $\frac{a^2 - a - 2}{2a^2 - 10a + 12}$

g.) $\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 10x + 25}$

9. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a.) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ b.) $x^4 - 6x^2 = -8$ c.) $x^6 - 8 = 2x^3$

d.) $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$ e.) $8x^6 - 9x^3 = -1$ f.) $16x^4 - 625 = 0$

10. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a.) $(2x-1)(1-2x) = (x+6)^2 - 58$

b.) $(3x-2)^2 - (1-x)^2 = 45 - 20x$

c.) $(x-1)^2 - 2(x+2)^2 + 3(x-3)^2 = 6(x-1)^2 + 30$

11. Oldja meg a $Q \setminus \{-2; 0\}$ halmazon értelmezett egyenletet!

$$\frac{2}{x} + \frac{17}{x+2} = 24$$

12. Oldja meg az $R \setminus \{-3; 3\}$ halmazon az egyenletet!

$$\frac{x}{x^2-9} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{5}{4(x+3)}$$

13. Oldja meg a következő egyenletet valós számok halmazán!

a.) $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1}$

b.) $\frac{-1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$

c.) $\frac{(x-3)(x+2)}{x-1} = 2$

14. Oldja meg az alábbi egyenleteket valós számok halmazán!

a.) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$ c.) $\sqrt{4x^2 - 14x + 1} = 2x - 5$ e.) $\sqrt{6x^2 + 8x - 8} - \sqrt{3x - 2} = 0$

b.) $\sqrt{x+5} = x - 7$ d.) $\sqrt{x^2 - 9x + 23} - 3 = 0$ f.) $\sqrt{17x^2 - 8x - 3} + x = 0$

15. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget valós számok halmazán

a.) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$

b.) $5x^2 + 7x \geq -2$

c.) $3x^2 + 4 < 8x$

d.) $-x^2 + 4x + 5 > 0$

e.) $x^2 + 2x < 0$

d.) $\frac{3x^2 - 30x + 75}{4x^2 - 100} > -1$

16. Oldja meg a következő egyenletrendszereket valós számok halmazán

a.) $x + y = 7$
 $xy = -18$

b.) $x - y = 8$
 $xy = -15$

c.) $2x + 3y = -15$
 $xy = -9$

d.) $x^2 - y^2 = 81$
 $x - y = 1$

e.) $y - x^2 = 3$
 $y - x = 3$

f.) $x^2 - y^2 = 40$
 $x \cdot y = 21$

h.) $x^2 + y^2 = 80$
 $xy = 32$

i.) $x - y = -1$
 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

j.) $x^2 + xy = 35$
 $y^2 + xy = 14$

17. Mutassa meg, hogy ha $a > 0$ akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$

18. Oldja meg az alábbi egyenletet valós számok halmazán
 $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

19. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

a.) $(x+3)^2 \leq 8$

b.) $\frac{3x^2 - 30x + 75}{4x^2 - 100}$

c.) $1 \leq \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15}$

d.) $\frac{x^2 + 2x - 63}{x^2 - 8x + 7}$

20. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet.

$$\frac{3 + 2x - x^2}{3 - x} = 0$$

21. Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $x^2 - 5x - 14 = 0$ egyenlet gyökeinél 2-vel nagyobbak!

22. Oldja meg valós számok halmazán az egyenletet!

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$$

23. Adja meg a $-\frac{3}{8}x^2 + \frac{\sqrt{5}}{4}x + 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsának pontos értékét!

24. Egy másodfokú függvény zérushelyei a 2 és a 6.

a függvény grafikonja a -24 koordinátájú pontban metszi az y tengelyt. Határozza meg a függvény szélsőértékét a valós számok halmazán.

25. Tekintsük az $x \mapsto -2x^2 + 8x + c$ valós számokon értelmezett függvényt! Határozza meg c értékét úgy, hogy a

a.) a függvény grafikonja érintse az x tengelyt

b.) a függvény maximuma 6 legyen!

c.) az összes függvény érték pozitív legyen!

26. Ábrázolja a valós számok halmazán értelmezett függvényt!

a.) $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9}$

b.) Hány megoldása van az $f(x)=k$ egyenletnek, ahol k egy valós szám?

c.) Van-e olyan k valós szám, melyre az $f(x)=k$ egyenletnek pontosan k db megoldása van?

27. Oldja meg valós számok halmazán!

a.) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$

b.) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$

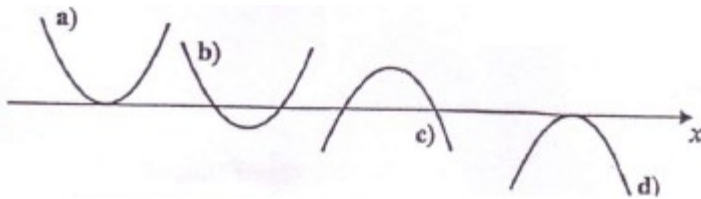
c.) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 12$

28. Oldja meg $x; y \in \mathbb{R}$ -en

$x - y = 600$

$(x - 10)(y + 5) = 600$

29. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényben $b^2 - 4ac = 0$ tudjuk továbbá, hogy $f(2005) = -2005$. Az alábbi grafikonok közül melyik lehet $f(x)$ grafikonja



30. A következő egyenletnek határozd meg a diszkriminánsát!

$px^2 + kx + a = 0$

31. Határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeinek számát a gyökök kiszámolása nélkül

a.) $-x^2 - 6x = 8$

b.) $2x^2 - 3x = 5$

c.) $x^2 + 6x = -9$

d.) $x^2 + 3 = 0$

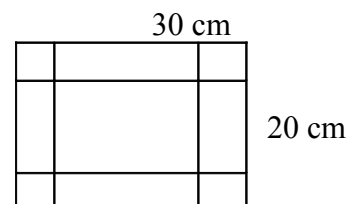
32. Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszor akkora mint a másik, a területe pedig $7,5 \text{ cm}^2$. Mekkora a háromszög befogói?

33. Hány oldalú sokszögnek van annyi átlója, mint ahány oldala?

34. Két kombájn együtt 4 nap alatt learatta a szövetkezet búzatábláját. Az egyik kombájn egyedül 6 nappal hosszabb idő alatt végezte volna el ugyanazt az aratási munkát mint a másik. Hány napig aratott volna külön-külön a két kombájn?

35. a.) Téglalap alakú lemezből dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkaiból 5 cm-es négyzeteket vágunk ki, és azután az oldalakat felhajtjuk. Mekkora térfogatú dobozt kapunk, ha $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ -es téglalapból indulunk ki?

b.) Négyzet alakú lemezből az a)-ban leírt módon 900 cm^3 térfogatú dobozt tudunk készíteni. Mekkora volt a négyzet oldala?



36. A piacon almát vásároltunk télire 5400 Ft-ért. Ha ugyanennyiért a kilónként 12Ft-tal drágább fajtából vásároltunk volna, akkor 5 kg-mal kevesebbet kaptunk volna. Hány kg almát vettünk?
37. Idős hölgyek baráti körének tagjai megegyeznek abban, hogy hetente egyszer mindegyikük „pletyizik” egy kicsit telefonon a társaság összes többi tagjával. Gyorsan meg is állapították, hogy ehhez 66 telefonbeszélgetést kell hetente lebonyolítaniuk.
- a.) Hány tagja van az idős hölgyek baráti körének?
38. Melyik az a tört, amelynek számlálója 2-vel nagyobb a nevezőjénél, és tudjuk, értéke nem változik, ha a számlálójához 5-öt adunk, nevezőjét pedig kétszeresére növeljük?
39. Egy téglalap alakú asztallap területe 32 dm^2 , kerülete 24 dm. Mekkora az oldalai?
40. Három egymás után következő természetes szám négyzetének összege 974. Melyek ezek a számok?
41. Egy konvex sokszögben összesen 90 átló húzható. Határozza meg a sokszög oldalszámát!
42. Melyik az a szám, amelyet ha megszorozunk a nála 1-gyel nagyobb számmal, a szorzat 25-tel lesz nagyobb, mint az eredeti szám?
43. Két konvex sokszög összes átlóinak száma 158, belső szögek összege 4320° . Hány oldalúak a sokszögek?
44. Egy derékszögű háromszög területe 55 cm^2 , az átfogója $\sqrt{221}$. Mekkora a befogói?
45. Nyelvvizsgára készülve minden nap ugyanannyi tesztet oldottam meg egy 720 tesztet tartalmazó könyvből. Ha naponta 20 teszttel többet oldottam volna meg, akkor 3 nappal hamarabb lettem volna készen vele. Hány napig tartott a tesztek megoldása?
46. Egy tört nevezője 4-gyel nagyobb a számlálójánál. Ha a számlálót 3-mal csökkentjük és a nevezőt ugyanannyival növeljük, a tört értéke felére csökken. Melyik ez a tört?
47. Egy áru árát felemelték, majd később- mivel nem fogyott- kétszer annyi százalékkal csökkentették, mint ahány százalékkal felemelték annak idején. Így az eredeti áránál 5,5%-kal lett olcsóbb.
Hány százalékkal emelték fel az árát eredetileg?